1. 等差等比. 100%考.

2. 求通项 (难) 12种方法以上

3. 求和

4. 和函数、不等式、放缩结合

$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n$

通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n - a_m = (n-m)d$$

$\{a_n\}$ 等差 $\Leftrightarrow a_n = pn + q$ ($d = p$) $\Leftarrow a_{n+1} - a_n = p(n+1) + q - pn - q = p$ 公差

除常数链外，等差数列是一次函数

斜率 = 公差

等差单调性 $\begin{cases} d>0 & \uparrow \\ d=0 & \text{常数列} \\ d<0 & \downarrow \end{cases}$

等差 ± 等差 = 等差

等差 × 常数 = 等差

等差 / 等差 / 等差 × 等差 / $\sqrt{\text{等差}}$ } 不是等差数列

if $\{a_n\}$ == 等差 {
$\{a_{3k-1}\}$ = 等差
}

性质：$m+n = p+q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

$(m-p)d = (q-n)d$

$m-p = q-n$ (若 $d \neq 0$)

$m+n = p+q$

等差中项：$a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$

S_n (前 n 项和) $\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 \end{cases}$

$2S_n = n(a_1 + a_n)$

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

证明等差数列

1. 定义 $a_{n+1} - a_n = d$

2. 等差中项 $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$

等差数列前 n 项和

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

① $S_{2n-1} = \frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2} = (2n-1)a_n$.

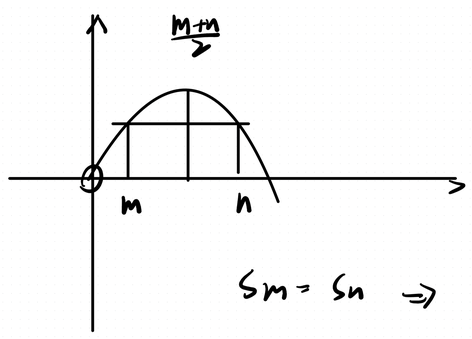
$$S_7 = \frac{7(a_1+a_7)}{2} = 7a_4$$

② $S_n = na_1 + \frac{d}{2}n^2 - \frac{d}{2}n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$

$\{a_n\}$ 等差 $\Leftrightarrow S_n = \frac{d}{2}n^2 + Bn$ 常数项为 0.

③ $\frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}n + B$ $\{S_n\}$ 等差 $\Leftrightarrow \{\frac{S_n}{n}\}$ 等差.

④



$S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$.

⑤ $\{a_n\}$ 等差 $\Rightarrow S_n,\ S_{2n} - S_n,\ S_{3n} - S_{2n},\ S_{4n} - S_{3n} \cdots$

公差 $n \cdot nd = n^2 d$.

⑥ S_n: $a_1 > 0$, $d < 0$ 先 ↑ $S_n \exists \max$.

$a_1 < 0$ $d > 0$. $a_n \uparrow$ $S_n \exists \min$.

⑦ S_n 的最大 n 值

⑧ S_n 的奇偶性.

a_n 有 $2n$ 项.

$a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2n-1}$.

$a_2, a_4, a_6 \cdots\cdots a_{2n}$

$S_{偶} - S_{奇} = nd$

$$\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = \frac{\frac{n(a_2+a_{2n})}{2}}{\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

a_n 有 $2n-1$ 项.

$a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2n-1}$ n 项

$a_2, a_4, \cdots, a_{2n-2}$ $n-1$ 项

$S_{奇} - S_{偶} = a_1 + (n-1)d = a_n = a_{中}$

$$\frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}}{\frac{(n-1)(a_2+a_{2n-2})}{2}} = \frac{n}{n-1}$$

第14讲:等差数列经典结论总结 10-12'

题型一:等差数列基本量的求解

1. (2018全国卷Ⅰ)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$3S_3=S_2+S_4$,$a_1=2$,则$a_5=$(　B　)

A. -12　　B. -10　　C. 10　　D. 12

$S_3+S_3-S_2=S_4-S_3$

$a_1+a_2+a_3=a_4$.

$4a_1+5d=a_1+3d$.

$\therefore 2d=-3a_1$　$d=-3$.

$a_5=a_1+4d=2-12=-10$.

2. (2019全国Ⅱ)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和. 若$a_1\neq 0$,$a_2=3a_1$,则$\dfrac{S_{10}}{S_5}=$ __4__.

$d=2a_1$

$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{10a_1+\frac{10\times 9}{2}d}{5a_1+\frac{5\times 4}{2}d}=4$

3. (2021新高考Ⅱ)记S_n为公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项的和,若$a_3=S_5$,$a_2\cdot a_4=S_4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式。

(2)求使得$S_n>a_n$的n的最小值。

(1)

$a_3=S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3$ (中项.) $\Rightarrow a_3=0$.

$a_2\cdot a_4=(a_3-d)(a_3+d)=-d^2=(-2d-d+d)$

$\because d\neq 0$. $\therefore d=2$

$\therefore a_n=a_3+(n-3)d=2n-6$　$(n\in N^*)$

(2) $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(-10+2n)}{2}$

$=n^2-5n>2n-6$

$\Rightarrow n<1$ 或 $n>6$.

$\because n\in N^*$

$\therefore n$最小值为7.

高中课程资料微信:NSJ2026

题型二：等差数列的性质

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3+a_8=10$，则 $3a_5+a_7=$ _____.

法一：$3a_5+a_7=a_5+a_5+a_5+a_7=a_3+a_8+a_3+a_8=20$

$m+n=p+q \Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$

法二：$a_3+a_8=a_1+2d+a_1+7d$

$3a_5+a_7=$

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=120$，则 $a_9-\frac{1}{3}a_{11}=$ _____.

$5a_8=120$

$a_8=24$.

$(a_8+d)-\frac{1}{3}(a_8+3d)$

6. 已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，则 $|m-n|=$ _____.

题型三：等差数列前 n 项和经典结论

7. (2019 江苏) 已知数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和．若 $a_2a_5+a_8=0$，$S_9=27$，则 S_8 的值是 _____.

$S_9=\frac{(a_1+a_9)\times 9}{2}=27=9a_5$

$a_5=3=a_1+4d=\frac{3}{2}d \Rightarrow d=2$.

$(a_1+d)\times 3+a_1+7d=0$.

$4a_1+10d=0$.

$a_1=-\frac{5}{2}d=-5$

$S_8=8a_1+\frac{8\times 7}{2}d$

$=-40+56=16$

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$，$S_{2m-1}=38$，则 $m=$ _____.

下标是奇数.

一定为等差中项.

$2a_m-a_m^2$

$=a_m(2-a_m)=0$.

$a_m=2$ 或 $a_m=0$

$(2m-1)a_m=38$.

$m=10$.

高中课程资料微信：NSJ2026

9. 等差数列$\{a_n\}$的各项为正数，公差为2，前n项和为S_n，若$\{\sqrt{S_n}\}$也是等差数列，则$a_1=$（ A ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

$=n^2+(a_1-1)n$

$\sqrt{S_n}$ 为一次函数.　　$a_1-1=0$.

$\therefore a_1=1$.

10. 两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，其公差分别为d_1和d_2，其前n项和分别为S_n和T_n，则下列说法正确的是（　　）

$a_1=\frac{d}{2}$

A. 若$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列，则$d_1=2a_1$ ✓　　A：$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

B. 若$\{S_n+T_n\}$为等差数列，则$d_1+d_2=0$

C. 若$\{a_nb_n\}$为等差数列，则$d_1=d_2=0$　　$d_1=0$或$d_2=0$.

D. 若$b_n\in\mathbf{N}^*$，则$\{a_{b_n}\}$也为等差数列，且公差为d_1+d_2

✓.

$a_n=a_1+(n-1)d_n$.

$a_{b_n}=a_1+(b_n-1)d_1$

$=a_1+[b_1+(n-1)d_2-1]d_1$

$=d_1d_2n+\Delta$

B：$S_n=\frac{d_1}{2}n^2+(a_1-\frac{d_1}{2})n$.

$T_n=\frac{d_2}{2}n^2+(b_1-\frac{d_2}{2})n$

S_n+T_n 二次　　$\therefore d_1+d_2=0$.

11. 设$\{a_n\},\{b_n\}$是两个等差数列，它们的前n项和为S_n和T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+45}{n+3}$，则$\frac{a_n}{b_n}$为整数的个数是_____.

$\frac{S_n}{T_n}$ 二次函数　　$\frac{7n+45}{n+3}$ 至少约掉 n.

$\frac{S_n}{T_n}=\frac{k(7n^2+45n)}{k(n^2+3n)}$

$S_n=k(7n^2+45n)\Rightarrow a_n=k(14n+38)$

$\frac{d}{2}=7$.　　~~$n=1$时，$S_n=52k$~~　　~~$d=\frac{118k-52k}{2}=14k$~~

$\therefore d=14$　　~~$n=2$时，$S_n=108k$~~

$T_n=k(n^2+3n)\Rightarrow b_n=k(2n+2)$

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{14n+38}{2n+2}$

$=\frac{7n+19}{n+1}$

$=7+\frac{12}{n+1}$

12. (2013全国Ⅰ) 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_{m-1}=-2,S_m=0,S_{m+1}=3$，则$m$_____.

13. 已知$\{a_n\}$为等差数列的前n项和为S_n，若$S_4=6,S_8=10$，则$\frac{S_{16}}{S_{12}}=$_____.

S_4　S_8-S_4　$S_{12}-S_8$　$S_{16}-S_{12}$　等差

(-5_0)

6　　4　　2　　0



14. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=2, S_6=12$，则 $S_8=$ ____20.____.

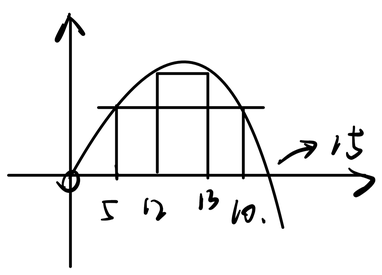
S_2-S_0　　S_4-S_2　　S_6-S_4　　S_8-S_6

2　　$2+d$　　$2+2d$　　$2+3d=8$.

$2+d=S_4-2$　　$12-4-d=8-d=2+2d$.

$S_4=4+d$　　$d=2$.

15. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=20$，前 n 项和为 S_n，且 $S_{10}=S_{15}$，问当 n 为何值时，S_n 有最大值，并求出它的最大值.



$S_{12}=S_{13}=13a_7=130$.

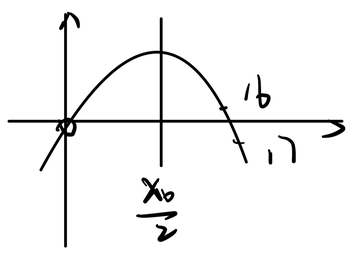
$a_{13}=0$.

$a_7=10$.

$S_{25}=0.=25a_{13}$

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 是前 n 项和，若 $S_{16}>0$ 且 $S_{17}<0$，则当 S_n 最大时，n 的值为（ C ）

A. 16　　B. 9　　C. 8　　D. 10



$16<x_0<17$

$8<\frac{x_0}{2}<8.5$

17. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1>0, a_{2003}+a_{2004}>0, a_{2003}\cdot a_{2004}<0$，则使前 n 项和 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 是（　　）

A. 4005　　B. 4006　　C. 4007　　D. 4008.

$\because a_1>0$，后面有负，一定单调递减.

S_{2004} 负.

S_{2003} 取最大值.

$a_{2003}+a_{2004}>0$.

$S_{4006}=\frac{4006(a_1+a_{4006})}{2}>0$.

18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差为 d. 已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$a_7<0$，则（　　）

A. $a_6>0$

B. $-\frac{24}{7}<d<-3$

C. $S_n<0$ 时，n 的最小值为 13

D. 数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 中最小项为第 7 项



高中课程资料微信：NSJ2026

19. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_6>S_7>S_5$，给出下列五个命题：(1)$d<0$;(2)$S_{11}>0$;(3)$S_{12}<0$;(4) 数列 $\{S_n\}$ 中的最大项为 S_{11};(5)$|a_6|>|a_7|$. 其中正确命题的序号是 _____.

题型四：证明等差数列

20. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{3}{5}$，$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$. 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列.

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2-\frac{1}{a_n}}-1}-\frac{1}{a_n-1}$$

$$=\frac{a_n}{a_n-1}-\frac{1}{a_n-1}=1 \quad \{b_n\} \text{ 等差}$$

21. (2016 天津) 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，公差为 d. 对任意的 $n\in N^*$，b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项.

(1) 设 $c_n=b_{n+1}^2-b_n^2$，$n\in N^*$. 求证：数列 $\{c_n\}$ 是等差数列；

$$b_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$$

$$c_{n+1}-c_n=b_{n+2}^2-b_{n+1}^2-b_{n+1}^2+b_n^2$$

$$=a_{n+2}\cdot a_{n+3}-a_{n+1}\cdot a_{n+2}-a_{n+1}\cdot a_{n+2}+a_n\cdot a_{n+1}=a_{n+1}(a_{n+3}-a_{n+1})-a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$$

22. 已知数列 $S_n=\frac{n(a_n-a_1)}{2}$，证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

$S_n-S_{n-1}=a_n\ (n\geqslant 2)$

错位相减

$$\begin{cases}2S_n=n(a_n-a_1) & ①\\ 2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}-a_1) & ②\end{cases}$$

题目中即有 a_n，又有 S_n.

则全部换为 a_n 或 S_n.

① − ②　$2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}-a_1$

$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}=a_1$　③

$n\to n+1$

$(n-1)a_{n+1}-na_n=a_1$　④

③ − ④　$(2n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}+(n-1)a_{n+1}$

$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\ (a_n\geqslant 2)$

$\{a_n\}$ 等差.

高中课程资料微信：NSJ2026





课堂总结

高中课程资料微信：NSJ2026

作业

1. 设 S_n 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_8=4a_3, a_7=-2$，则 $a_9=$ _____.

2. 下列关于等差数列的命题中正确的有（　　）

A. 若 a, b, c 成等差数列，则 a^2, b^2, c^2 一定成等差数列

B. 若 a, b, c 成等差数列，则 $2^a, 2^b, 2^c$ 可能成等差数列

C. 若 a, b, c 成等差数列，则 $ka+2, kb+2, kc+2$ 一定成等差数列

D. 若 a, b, c 成等差数列，则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 可能成等差数列.

3. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_8+a_9>0, a_7+a_{10}<0$，则当 $n=$ _____ 时，$\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=7$，公差为 d，前 n 项和为 S_n，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取最大值，则 d 的取值范围是 _____.

高中课程资料微信：NSJ2026

